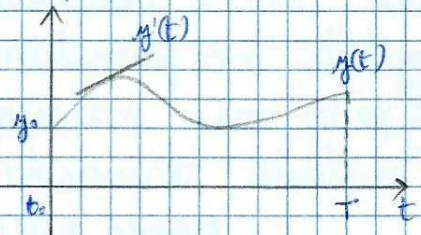


Metodi numerici per le equazioni differenziali ordinarie
 Le equazioni differenziali hanno per soluzione una funzione di cui si conoscono una o più derivate (prima, seconda, ecc.) e il valore nel punto iniziale, nonché alcune condizioni al contorno.

Se compare solo la derivata prima l'equazione è detta del primo ordine; se inoltre il fenomeno che descrive è influenzato da una sola variabile l'equazione è ordinaria. Le derivate saranno fatte solo rispetto a tale variabile senza possibilità di confusione. Ecco un esempio:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y) & t \in [0, T] \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$



nota

Si può considerare anche un sistema di M equazioni:

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_M(t) \end{pmatrix} \quad F(t, Y) = \begin{pmatrix} f_1(t, Y) \\ f_2(t, Y) \\ \vdots \\ f_M(t, Y) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} Y'(t) = F(t, Y) \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases}$$

Se l'equazione non è del primo ordine è possibile ricondurla al primo ordine con un cambio di variabile. Ecco un esempio:

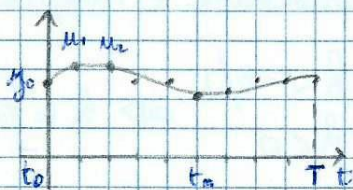
$$\begin{cases} 3y''(t) + 5y'(t) + 2y(t) = 1 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = z(t) \\ z'(t) = \frac{1 - 5z(t) - 2y(t)}{3} \\ y(0) = 1 \\ z(0) = 2 \end{cases}$$

II ordine I ordine

Si passa ad un sistema di due equazioni:

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \quad F(t, Y) = \begin{pmatrix} z(t) \\ \frac{1 - 5z(t) - 2y(t)}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} Y'(t) = F(t, Y) \\ Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

La soluzione esatta viene approssimata con un certo numero di valori u_m , $m = 0, \dots, N$:



$$y'(t) = f(t, y) \quad u_m = y(t_m) \\ m = 0, \dots, N$$

L'approssimazione consiste nel sostituire alla derivata prima $y'(t)$ il rapporto incrementale. Si possono seguire tre strade:

- metodo di Eulero esplicito ($m=0, \dots, N$):

$$\frac{u_{m+1} - u_m}{h} = f(t_m, u_m)$$

- metodo di Eulero implicito ($m=0, \dots, N$):

$$\frac{u_{m+1} - u_m}{h} = f(t_{m+1}, u_{m+1})$$

- metodo di Crank-Nicolson ($m=0, \dots, N$):

$$\frac{u_{m+1} - u_m}{h} = \frac{1}{2} (f(t_m, u_m) + f(t_{m+1}, u_{m+1}))$$

Il primo metodo è detto esplicito perché la soluzione al passo $m+1$ è calcolata usando quella al passo m . I metodi impliciti non permettono invece di esprimere la soluzione al passo $m+1$ esclusivamente in funzione di quella al passo m . È evidente scrivendo ($m=0, \dots, N$):

EULERO ESPLICITO

$$u_{m+1} = u_m + h \cdot f(t_m, u_m)$$

EULERO IMPLICITO

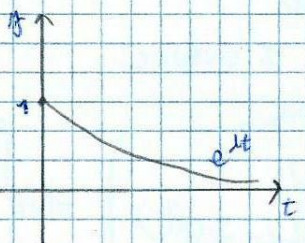
$$u_{m+1} - u_m - h \cdot f(t_{m+1}, u_{m+1}) = 0$$

Nel secondo caso non si riesce a isolare u_{m+1} . Si pone la funzione $g(u_{m+1}) = u_{m+1} - u_m - h \cdot f(t_{m+1}, u_{m+1})$ cercandone lo zero con uno dei metodi già visti in precedenza (Newton, bisezione).

Nonostante questo inconveniente il metodo implicito possiede assoluta stabilità numerica. Vediamo di cosa si tratta considerando il seguente "test" lineare:

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda y & \lambda < 0 \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad \text{la soluzione esatta è } y(t) = e^{\lambda t}$$

Nota la soluzione esatta applichiamo Eulero esplicito:



$$\begin{aligned} u_{m+1} &= u_m + h \cdot f(t_m, u_m) = u_m + h (\lambda \cdot u_m) = \\ &= u_m (1 + h \lambda) = [u_{m-1} + h (\lambda u_{m-1})] (1 + h \lambda) = \\ &= u_{m-1} (1 + h \lambda)^2 = u_{m-2} (1 + h \lambda)^3 = \dots = \\ &= u_0 (1 + h \lambda)^{m+1} \end{aligned}$$

Con $u_0 = 1$ nel nostro caso particolare. Che segue che $u_m = (1 + h \lambda)^m$. Essendo $e^{\lambda t} \rightarrow 0$ per $t \rightarrow \infty$ (e $\lambda < 0$) deve allora essere che $u_m = (1 + h \lambda)^m \rightarrow 0$ per $m \rightarrow \infty$, tale condizione è verificata se:

$$\begin{aligned} |1 + h \lambda| < 1 \\ \lambda < 0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 1 + h \lambda > -1 \\ 1 + h \lambda < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h < -2/\lambda \\ h < 0 \end{cases} \Rightarrow h \in]0, -2/\lambda[$$

Abbiamo ottenuto l'intervallo di assoluta stabilità che ci consente di spiegare in cosa consiste la stabilità assoluta stessa. Il passo di discretizzazione h deve appartenere a tale intervallo affinché il metodo restituisca il corretto risultato, cioè che approssimi realmente la soluzione esatta. Altrimenti l'errore di approssimazione si amplifica ad ogni passaggio e per grandi t (cioè n) si manifestano ampie oscillazioni che vanificano il tentativo di bradire numericamente l'esatta soluzione.

In altre parole, h deve essere sufficientemente piccolo. Usando invece "Eulero implicito" si può usare un h qualsivoglia:

$$u_{m+1} = u_m + h \cdot f(t_{m+1}, u_{m+1}) = u_m + h(\lambda u_{m+1})$$

$$\Rightarrow u_{m+1} = \frac{u_m}{1-h\lambda} = \frac{u_{m-1}}{1-h\lambda} \cdot \frac{1}{1-h\lambda} = \frac{u_{m-1}}{(1-h\lambda)^2} = \frac{u_{m-2}}{(1-h\lambda)^3} = \dots =$$

$$= \frac{u_0}{(1-h\lambda)^{m+1}}$$

Valle anche in questo caso $u_m = \frac{1}{(1-h\lambda)^m} \rightarrow 0$ per $m \rightarrow \infty$, $\lambda < 0$. Deve essere:

$$|1-h\lambda| > 1 \Rightarrow h > 0 \Rightarrow h \in]0; +\infty[\Rightarrow \forall h > 0$$

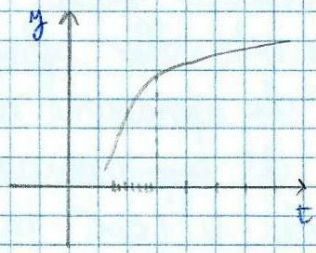
Non esiste intervallo di assoluta stabilità: Eulero implicito è sempre assolutamente stabile.

Occorre prestare attenzione alla possibilità di una soluzione oscillante: in tal caso la riduzione di h nell'Eulero esplicito non conduce ad alcun cambiamento! È buona norma tentare l'uso del metodo esplicito per la sua semplicità, riducendo eventualmente h . Se è troppo difficile convergere è necessario allora passare al metodo implicito. Quest'ultimo è incondizionatamente assolutamente stabile, ma le equazioni da risolvere sono non lineari!

Per i metodi numerici si parla anche di zero-stabilità, ovvero del progressivo miglioramento nell'approssimare la soluzione esatta al ridurre il passo h . Per $h \rightarrow 0$ la soluzione approssimata converge a quella esatta. Non è una proprietà intrinseca di tutti i metodi, ma verificata per ciascuno. Di ogni modo i metodi che introdurremo sono tutti zero-stabili.

Talvolta è conveniente usare un passo di discretizzazione variabile. Un esempio può essere una funzione molto ripida in un tratto e meno pendente in un altro, come

nel grafico seguente:



è possibile stimare $\lambda_m = \frac{\partial f}{\partial y}(t_m, u_m)$ che ad ogni iterazione rende stabile il metodo (si calcola poi $h_m = 2/\lambda_m$).

In alternativa si calcola l'errore e_n relativo $e_n = \|u_{n+1} - u_n\|$ da confrontare

con una certa tolleranza ϵ . Se è maggiore si riprova con $h^* = \frac{\epsilon}{e_n} \cdot h$ (che il passo scelto inizialmente). Si ricalcola e_n finché e_n diventa più piccolo di ϵ .

Un altro concetto importante è l'ordine di precisione del metodo, che consente di sapere quale sia l'ordine di interesse dell'errore commesso ad ogni iterazione. La precisione dipende dalla distanza tra il punto approssimato e la funzione. Confrontiamo quindi, per Euler esplicito, la prima iterazione del metodo con lo sviluppo in serie di Taylor della soluzione esatta $y(t)$ nell'intorno di t_0 :

$$u_1 = u_0 + h \cdot f(t_0, u_0) \quad y(t_0) = y(t_0 + h) = y(t_0) + h y'(t_0) + \frac{1}{2} h^2 y''(t_0) + \dots$$

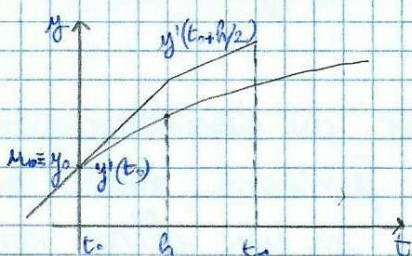
Nello sviluppo ci siamo fermati al secondo ordine. Confrontando si nota che u_0 corrisponde a $y(t_0)$ e $h \cdot f(t_0, u_0)$ a $h \cdot y'(t_0)$. sottraendo quindi membro a membro si ottiene che l'errore commesso è:

$$|u_1 - y(t_0 + h)| = O(h^2)$$

L'errore è quindi di ordine 2, ovvero Euler esplicito è esatto fino all'ordine 1. È allora di ordine 1.

Quel Euler implicito è di ordine 1, mentre Crank-Nicholson è di ordine 2. Hanno precisione non molto elevata.

Un metodo più preciso è il Runge-Kutta di ordine variabile. Si usa infatti una formula a più coefficienti (un numero maggiore quanto migliore è la precisione che si vuole raggiungere) determinabili con lo sviluppo in serie di Taylor della soluzione esatta. Ad esempio per ordine 4:



$$y(t_0) = y(t_0) + h \cdot y'(t_0) + \frac{h^2}{2} \cdot y''(t_0) + \frac{h^3}{6} \cdot y'''(t_0) + \frac{h^4}{24} \cdot y^{IV}(t_0) + O(h^5)$$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

I coefficienti sono:

$$K_1 = f(t_m, u_m) \quad K_2 = f\left(t_m + \frac{h}{2}, u_m + \frac{h}{2} K_1\right) \quad K_3 = f\left(t_m + \frac{h}{2}, u_m + \frac{h}{2} K_2\right)$$

$$K_4 = f\left(t_{m+1}, u_m + h K_3\right)$$

Nel caso analizzato si dice che l'equazione è risolta mediante il procedimento di ode45, in cui ode sta per "ordinary differential equation", 4 per la precisione, fino all'ordine 4, 5 per l'ordine totale.